УДК 681.518
DOI https://doi.org/10.32782/2663-5941/2024.1.1/42

Положаєнко С.А.
Національний університет «Одеська політехніка»

Прокофьєв А.Ю.
Національний університет «Одеська політехніка»

МОДЕЛІ ВИЗНАЧЕННЯ НАДІЙНОСТІ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ, ФУНКЦІОНУВАННЯ ЯКИХ ХАРАКТЕРИЗУЄТЬСЯ РЕЖИМОМ ПРОФІЛАКТИКИ

У роботі досліджуються питання прогнозу надійності динамічних систем для випадків, коли їх функціонування передбачає профілактичне обслуговування. Прогноз ґрунтується на застосуванні математичних методів та відповідних моделей.

При реальній експлуатації технічних систем (переважну більшість яких можна розглядати як динамічні системи) виникають певні труднощі в підтримці заданого рівня їх працездатності, що може бути компенсовано обґрунтованими режимами обслуговування, наприклад, профілактикою–з одночасною оцінкою надійності динамічної системи, яка зазнала відновлювальних (суть–профілактичних) робіт. Разом з тим, проведення для динамічної системи певних видів профілактик, визначення їх тривалості та часу міжпрофілактичної експлуатації, потребує раціонального планування, яке може бути забезпечено, зокрема, прогнозним моделюванням. У той же час, в практиці формування режимів профілактики динамічних систем, постає ціле коло задач, вирішення яких передбачає наявність неповної інформації про надійність. Така ситуація виникає упродовж всього терміну експлуатації динамічних систем, що нагально вимагає розробки прикладних математичних методів дослідження. Їх використання дозволяє простежити за якісною зміною показників надійності та завчасно планувати необхідні профілактичні заходи.

При організації профілактичних робіт перед обслуговуючим персоналом виникають протиріччя: з одного боку, необхідно підвищувати надійність обладнання (яке також може розглядатися як динамічні системи з точки зору теорії систем) за рахунок проведення профілактичних заходів, що потребує значних витрат часу та матеріальних ресурсів; з іншого боку–економічно не вигідно на тривалий час виводити з виробничого циклу обладнання на профілактику. Тому існують оптимальні умови проведення профілактичного обслуговування обладнання (динамічних систем), при яких забезпечується достатньо висока надійність цих систем за умови мінімізації часу виведення з виробничого циклу останніх. Таким чином, науково обґрунтований комплекс профілактичного обслуговування дозволяє підтримувати рівень надійності динамічної системи, який закладено в неї на стадіях проектування та виробництва.

Ключові слова: *динамічна система, надійність, профілактика, коефіцієнт використання, модель, ланцюг Маркова.*

Постановка проблеми. *Профілактичне обслуговування* являє собою комплекс заходів, спрямованих на запобігання відмов динамічної системи та продовження терміну її служби [1].

До теперішнього часу опубліковано значну кількість робіт, присвячених віднаходженню *оптимальних режимів* профілактики [2]. Перші роботи у цьому напрямку, зокрема, почали з'являтися ще на межі 60-х та 70-х років минулого сторіччя, коли надійності і резервуванню динамічних систем надали значної уваги.

Класифікацію задач з оптимальної профілактики зручно провести з точки зору системи управління, яка використовується. Існує два типи систем управління процесом проведення профілактики [3].

До першого типу відносяться системи управління, в яких управляючий вплив (суть – профілактика) здійснюється у *фіксовані проміжки часу* [3–5]. Оптимальна періодичність профілактики в цьому випадку визначається на основі функції розподілу часу *безвідмовної роботи* системи та витрат, пов'язаних з проведенням профілактики, з одного боку, та викликаних *відмовою* системи, з іншого боку [4].

Вказаний метод, завдяки легкості свого застосування, має широке розповсюдження. Цей тип управління відноситься до класу систем управління з *відкритим контуром* [4, 5] та характеризується тим, що управляючий вплив не залежить від вихідних параметрів процесу (станів працездатності динамічної системи).

При другому типові систем управління процесом профілактики рішення щодо прийняття або не прийняття управляючого впливу ґрунтується на результатах *вимірювання параметрів на виході процесу*. В цьому випадку періодичність та тривалість профілактичних заходів залежить від стану динамічної системи на момент перевірки, а саме: якщо на момент перевірки динамічна система перебуває у такому стані, коли ризик відмови на найближчий час незначний, то ніяких відновлювальних робіт не проводиться, у іншому випадку– приймається рішення щодо проведення профілактики, причому обсяг профілактичних робіт також може визначатися на основі аналізу виміряних параметрів на виході процесу. Цей тип управління процесом профілактики відноситься до класу систем управління *із замкнутим контуром* (або – *зі зворотним зв'язком*) [5].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Інтуїтивно зрозуміло, що використання інформації про стан динамічної системи (іншими словами–про процес накопичення несправностей) при однакових витратах повинно привести до більшого ефекту у порівнянні з випадком, коли профілактику призначають лише на підставі відомостей, які є до початку експлуатації динамічної системи. Це показано у роботах, наприклад [6–9], а також у роботах [10–12], в яких розглядаються питання технічного діагностування, дотичні до проблеми надійності динамічних систем. Зокрема, зауважується, що можна не здійснювати «зайві» профілактики у тих випадках, коли ризик відмови на найближчий час незначний.

У переважній більшості робот, присвячених проблемі визначення надійності динамічних систем в умовах запровадження профілактичних заходів, увагу приділяють якісній оцінці надійності на основі *коефіцієнту використання* досліджуваних систем *при оптимальній періодичності профілактики* і визначення термінів профілактики при її змінній періодичності (також на основі *коефіцієнту використання*).

Необхідність розв'язування такої задачі пояснюється тим, що при визначенні оптимальної періодичності профілактик, які враховують стан динамічної системи, слід виходити з мінімуму *умовної періодичності* математичних очікувань простоїв динамічної системи з моменту перевірки до моменту виявлення відмови [13]. При цьому стратегія обслуговування, тобто *вибору станів*, виявлення яких викликає по собі профілактику, вважається заданою. Одначе, на основі умовних математичних очікувань неможливо порівнювати обраних стратегій профілактики, оскільки їх число (умовно середніх простоїв) для кожної стратегії різне. Оптимальну послідовність профілактики можна визначити, виходячи з максимуму *узагальненого показника надійності* K_{rel} [3]. Нажаль методи обчислення K_{rel}, розроблені для динамічних систем з профілактикою по функції розподілу часу безвідмовної роботи [3, 6], у даному випадку не можуть бути застосовані, внаслідок того, що періодичність та тривалість профілактики є змінною величиною, яка залежить від стану динамічної системи на час перевірки.

Нижче запропоновано математичні моделі (ММ) щодо визначення надійності динамічних систем, для яких режим профілактики зумовлюється *контролем станів працездатності*.

Мета роботи полягає у розробці моделей та реалізуючих їх підходів до обчислення узагальненого показника надійності (або, інакше – *коефіцієнта використання*) для стратегій профілактики, виходячи з *мінімуму математичного очікування питомих втрат* динамічної системи.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо динамічну систему, яка в процесі функціонування може перебувати у множині станів $E = \{E_i\}$, $\left(i = \overline{0, v}\right)$. Стан динамічної системи у будь-який момент часу t визначається кількістю елементів, які відмовили, наприклад, стан E_0 відповідає повністю справній динамічній системі, стан E_v – відмові, а стани $E_1 ... E_{v-1}$ – являють собою проміжні стани. Переходи динамічної системи зі стану E_k, $0 \le k \le v$ у стан E_j $0 \le j \le v$; $k \ne j$ відбувається у відповідності з марковським однорідним процесом $x(t)$. Нехай задано інтенсивності переходів λ_{kj}, $k \ne j$:

$$P\left\{x(t + \Delta t) = E_j\big|_{x(t)} = E_k\right\} =$$
$$= \begin{cases} \lambda_{kj}(\Delta t) + O(\Delta t); & E_k, E_j \in E = \{E_i\}, k \ne j; \\ 1 - \sum\limits_{k \ne j}\left[\lambda_{kj}(\Delta t) + O(\Delta t)\right]; & E_k, E_j \in E = \{E_i\}, k \ne j. \end{cases} \quad (1)$$

Із стану E_v динамічна система не може перейти у інший стан без стороннього втручання, наприклад, ремонту. Потрапивши у цей стан, динамічна система перебуває у ньому скільки завгодно довго, тобто стан E_v для процесу $x(t)$ є *поглинаючим*. Формально для всіх $\tau > 0$

$$P\left\{x(t + \Delta t) = E_v\big|_{x(t)} = E_v\right\} = 1\,.$$

Зауваження. Завдання процесу $x(t)$ утворюючою матрицею $\Lambda = \left\{\lambda_{kj};\, E_k, E_j \in E = \{E_i\}, k \ne j\right\}$ описує еволюцію процесу тільки «локально», на безкінечно малому інтервалі $(t, t + \Delta t)$. Одначе, якщо додатково вказати вихідний стан E_k на момент часу $t=0$, то можна отримати повний опис процесу у часі, наприклад, віднайти перехідні ймовірності $P(k,j,t) \in E = \{E_i\}, k \neq j$. Це вдається зробити за допомогою системи диференційних рівнянь для $P(k,j,t)$, для складання якої достатньо мати $\lambda_{kj}(\Delta t) + O(\Delta t); E_k, E_j \in E = \{E_i\}, k \neq j$. Тому, при подальшому розгляді, завдання процесу $\Lambda = \{\lambda_{kj}; E_k, E_j \in E = \{E_i\}, k \neq j\}$ або $P(t) = \{P(k,j,t)\}$; $E_k, E_j \in E = \{E_i\}, k \neq j$ будемо вважати еквівалентними.

Для досягнення впевненості про те, що динамічна система виконує свої функції, остання піддається перевірці. Тривалість перевірки, на протязі якої визначається стан динамічної системи, являє собою випадкову величину $L(t)$ з довільним законом розподілу $\Pi(t)$.

Якщо на момент перевірки динамічна система перебуває у стані $E_L \in E' = \{E_i'\} \left(i = \overline{0, v'}, v' < v\right)$, то ніяких профілактичних робіт не проводиться, а призначається термін наступної перевірки через час $T_i \left(i = \overline{0, v'}, v' < v\right)$. У випадку, якщо динамічна система опинилася у стані $E_m = E|_{E'}$, то відбувається профілактика останньої, тобто динамічна система примусово переводиться у стан $E_L(E_m), E_L \in E'$ та призначається термін наступної перевірки через час $T_l \left(l = \overline{0, v''}, v'' < v\right)$. Час відновлення динамічної системи залежить від початкового E_m та кінцевого E_L її станів, а також кількості обслуговуючого персоналу та являє собою випадкову величину ϕ_{lm} з довільним розподілом $F_{lm}(t)$.

Без втрати загальності, у подальшому, будемо вважати, що при проведенні профілактики динамічна система відновлюється повністю, тобто завжди $E_L(E_m) = E_0$.

Поставлена задача призводить до моделі, яка дає змогу визначити оптимальні параметри профілактики за обраної стратегії (тобто, як зазначалося вище, управління процесом проведення профілактики).

Підхід до визначення траєкторії надійності динамічної системи. Для опису траєкторії надійності динамічної системи, з урахуванням проведення перевірок та профілактик, можна скористатись методом маркоських процесів з *вкладеним марковським ланцюгом* [14]. Вкладеним ланцюгом Маркова у випадку, що розглядається, є процес функціонування між двома перевірками, при яких було виявлено стан E_v (у прийнятих позначеннях–стан відмови динамічної системи). Очевидно, що характеристики надійності динамічної системи, отримані для вкладеного ланцюга Маркова, чинні і при $t \to \infty$.

Визначимо спочатку оптимальні періодичності перевірок. Для цього складемо систему рівнянь

$$M_{lv} = \min_{0 \le T_l < \infty} \left\{ M_t + \int_0^{T_l} P(l,v,t)\,dt + \sum_{E_{v''} \in E'} P(l,v'',T_l) M_{v''v} + \right.$$
$$\left. + \sum_{E_m \in E|_{E'}} P(l,m,T_l)\left(M_{m0} + M_{0v}\right) + \sum_{E_{li} \in E'} P(l,v'',T_l) M_{v0} \right\}, \quad (2)$$

де

M_{lv} – математичне очікування простоїв динамічної системи до моменту виявлення її відмови за умови, що у момент перевірки динамічна система перебуває у стані E_l;

M_t – математичне очікування часу перевірки динамічної системи;

T_l – час наступної перевірки, що визначається станом E_l;

M_{m0} – математичне очікування часу профілактики динамічної системи, зумовлене її переведенням зі стану E_l в стан E_0.

Розв’язавши систему (2) ітераційним методом, можна визначити оптимальні значення величин $\bar{T}_l$, що мінімізують M_{lv}, $\left(E_l \in E'; l = \overline{0, v''}, v'' < v\right)$.

Уведемо до розгляду випадковий процес ξ_t, який назвемо процесом, що спостерігається, та визначимо його наступним чином. Нехай чергова перевірка динамічної системи відбувається у певний момент часу t, причому виявляється стан E_i $\left(i = \overline{0, v}\right)$. Тоді приймаємо $\xi_{Tt} = E_i$ для таких значень t, що $t_i \le t < t_i + T_i$ $\left(i = \overline{0, v}\right)$. Тобто вважаємо, що динамічна система для процесу ξ_t перебуває у стані E_i $\left(i = \overline{0, v}\right)$ до моменту наступної перевірки. Якщо $\xi_{t_i + T_i} = E_j$ (в даному випадку не виключено, що $j = i$).

Будемо називати інтервал часу між сусідніми переходами – *кроком*. Тоді, використовуючи $P(t)$ та віднайдені з (2) значення $\bar{T}_l$ $(E_l \in E')$, можна записати матрицю переходів процесу ξ_t за один крок:

$$\mathbf{Q}_{ij} = \begin{cases} P(i,j,T_i);\ E_i \in E';\ E_j \in E, \\ P(0,j,T_0);\ E_i \in E_0;\ E_j \in E, \\ 0;\ i = v;\ E_j \in E, \\ 1;\ i = v;\ E_j \in E_v. \end{cases} \quad (3)$$

В (3) стан E_v є поглинаючим, що випливає з визначення ланцюга Маркова.

Кількість перевірок між моментами відмов динамічної системи можна представити як кількість кроків процесу ξ_t до потрапляння у стан E_v. Математичне очікування числа перевірок (представлене у вигляді деякої матриці) можна визначити на підставі наступної утвореної матриці виду:

$$\mathbf{M} = \mathbf{Q}(0)\left[\mathbf{I} - \mathbf{C}\right]^{-1}, \quad (4)$$

де

$\mathbf{Q}(0)$ – початковий вектор ймовірностей, що визначає стан динамічної системи після профілактики, яку було проведено внаслідок відмови;

$\mathbf{I}$ – одинична матриця;

$\mathbf{C}$ – матриця, яка отримується з матриці $\mathbf{Q}_{ij}$ викреслюванням v -го рядка та v -го стовпчика.

У випадку, який розглядається, $\mathbf{Q}(0)=\|1,0,0,...,0\|$, а тому матриця $\mathbf{M}$, що визначається виразом (4), перероджується у вектор-рядок, який набуває вигляду

$$\mathbf{M}=\|M_1,M_2,...,M_{v-1}\|, \qquad (5)$$

де $M_i\ \left(i=\overline{1,v-1}\right)$ –являє собою середнє число потраплянь процесу ξ_t в стан $E_i\ \left(i=\overline{1,v-1}\right)$ до поглинань за умови, що процес ξ_t почався в стані E_0.

Тоді математичне очікування числа перевірок

$$M_{\text{n ch}}=\sum_{i=0}^{v-1}M_i\,. \qquad (6)$$

Нехай θ є математичне очікування часу тривалості еволюції вкладеного ланцюга Маркова. Можна стверджувати, що за час θ випадковий процес ξ_t здійснить $M_i\ \left(i=\overline{1,v-1}\right)$ переходів у стан $E_i\ \left(i=\overline{1,v-1}\right)$ та один перехід у стан E_v. Процес ξ_t у стані $E_i\ \left(i=\overline{1,v-1}\right)$ перебуває в середньому час

$$\tau_i=\begin{cases}T_i+M_t;\ E_i\in E',\\ T_{i0}+T_0+M_t;\ E_i\in E_{v-1}.\end{cases} \qquad (7)$$

Тоді час θ представиться у вигляді наступної суми:

$$\theta=\sum_{i=0}^{v-1}M_i\tau_i+T_{v0}\,. \qquad (8)$$

З іншого боку, після кожного потрапляння процесу ξ_t у стан $E_i\ \left(i=\overline{1,v-1}\right)$, динамічна система стає до роботи за призначенням на час

$$\tilde{\tau}=\begin{cases}T_i;\ E_i\in E',\\ T_0;\ E_i\in E_{v-1}.\end{cases} \qquad (9)$$

Математичне очікування часу простою, викликане відмовою динамічної системи до моменту виявлення відмови, усереднене по всіх станах E_i $\left(i=\overline{1,v-1}\right)$ процесу ξ_t, з котрих можливий перехід у стан E_v, запишеться у вигляді:

$$M_{\text{idl}}=\frac{1}{M_{\text{n ch}}}\left[\sum_{E_i\in E'}M_i\int_0^{T_i}P(i,v,t)\,dt+\sum_{E_i\in E_v}M_i\int_0^{T_0}P(0,v,t)\,dt\right]. \qquad (10)$$

Сумарний час використання динамічної системи за призначенням за проміжок часу θ складає:

$$\hat{\tau}=\sum_{i=0}^{v-1}M_i\,\tilde{\tau}_i-M_{\text{idl}}\,.\,. \qquad (11)$$

Таким чином, шуканий *узагальнений показник надійності* для стратегій профілактики, виходячи з мінімуму математичного очікування питомих втрат динамічної системи, можна обчислити як:

$$K_{\text{rel}}=\frac{\hat{\tau}}{\theta}=\frac{\sum_{i=0}^{v-1}M_i\,\tilde{\tau}_i-M_{\text{idl}}}{\sum_{i=0}^{v-1}M_i\tau_i+T_{v0}}. \qquad (12)$$

Розглянемо тестовий приклад щодо відшукання K_{rel}.

Приклад 1. Виконаємо кількісну оцінку коефіцієнта K_{rel} динамічної системи, складеної з одного основного та двох навантажених резервних елементів. Всі елементи мають однакову інтенсивність відмов λ. Якщо в момент перевірки динамічна система перебуває у станах E_0 або E_1, то ніяких профілактичних робіт не виконується та призначається час наступних перевірок через проміжки T_0 та T_1, відповідно. Якщо в момент перевірки виявляються стани E_2 або E_3, то динамічна система переводиться у стан E_0, а також призначається час наступної перевірки через проміжок T_0.

Приймемо, що для випадку, який розглядається, матриця ймовірностей переходів має вигляд:

$$\mathbf{Q}(t)=\begin{Vmatrix}e^{-3\lambda t} & 3\left(e^{-2\lambda t}-e^{-3\lambda t}\right) & 3\left(e^{-3\lambda t}-2e^{-2\lambda t}+e^{-\lambda t}\right) & 1-e^{-3\lambda t}+3e^{-2\lambda t}-3e^{-\lambda t}\\ 0 & e^{-\lambda t} & 2\left(e^{-\lambda t}-e^{-2\lambda t}\right) & 1-3e^{-2\lambda t}-2e^{-\lambda t}\\ 0 & 0 & e^{-\lambda t} & 1-e^{-\lambda t}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}.$$

Відповідно (2) запишемо систему рівнянь:

$$M_{03}=\min_{0\le T_0<\infty}\left\{M_t+\int_0^{T_0}P(0,3,t)\,dt+P(0,0,T_0)\,M_{03}+P(0,1,T_0)\,M_{13}+\right.$$
$$\left.+P(0,2,T_0)\left(M_{03}+M_{20}\right)+P(0,3,T_0)\,M_{30}\right\},$$
$$M_{13}=\min_{0\le T_0<\infty}\left\{M_t+\int_0^{T_1}P(1,3,t)\,dt+P(1,1,T_1)\,M_{13}+\right.$$
$$\left.+P(1,2,T_1)\left(M_{03}+M_{20}\right)+P(1,3,T_1)\,M_{30}\right\}.$$

Визначимо оптимальні значення $\bar{T}_0$ та $\bar{T}_1$ при наступних значеннях: $M_t=1$ год.; $\lambda=0,02$ год.$^{-1}$; $M_{20}=2$ год.; $M_{30}=2$ год.

Розв'язуючи системи рівнянь, записаних щодо оптимальних періодичностей перевірок, отримуємо: $\bar{T}_0=40$ год., $\bar{T}_1=30$ год. (відповідно: $\min(M_{03})=11$ год., $\min(M_{13})=4$ год.).

Підставляючи $\bar{T}_0$ та $\bar{T}_1$ в матрицю $\mathbf{Q}(t)$, отримуємо:

$$\mathbf{Q}(t)=\begin{Vmatrix}0,090 & 0,336 & 0,408 & 0,166\\ 0 & 0,302 & 0,495 & 0,203\\ 0 & 0 & 0,408 & 0,166\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}.$$

По формулах (4) та (5) обчислюємо вектор-рядок $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M}=\|1,34\quad 1,82\quad 2,45\|,$$

звідки

$$M_{\text{n ch}}=\sum_{i=0}^{2}M_i=5,61\,.$$

На підставі (7) та (9) маємо:

$$\tau=\|41\quad 31\quad 43\|,$$

$$\tilde{\tau}=\|40\quad 30\quad 40\|.$$

Обчислюємо M_{idl} по формулі (10)

$$M_{\text{idl}} = \frac{1}{M_{\text{n ch}}}(1,34 \cdot 2,5 + 1,82 \cdot 2,3 + 2,45 \cdot 2,5) = 2,43 \text{ год}.$$

Відповідно (8) та (11) визначаємо θ та $\hat{\tau}$:

$$\theta = 1,34 \cdot 41 + 1,82 \cdot 31 + 2,45 \cdot 43 + 3 = 219,4;$$

$$\hat{\tau} = 1,34 \cdot 40 + 1,82 \cdot 30 + 2,45 \cdot 40 - 2,43 = 203,8.$$

На підставі (12) визначаємо узагальнений показник надійності для стратегій профілактики

$$K_{\text{rel}} = \frac{203,8}{219,4} = 0,929,$$

який може бути використаний для прогнозування профілактичних заходів.

Варіантним випадком розглянутої вище задачі може представлятися визначення показників надійності динамічної системи за умови *обмеженої тривалості* профілактики. Необхідність такого формулювання задачі полягає в тому, що внаслідок випадкового характеру процесу профілактики (відновлення), час переведення динамічної системи у стан повної справності може «неприпустимо» затягнутися. Тому представляється доцільним *завчасно* (*попередньо*) *обмежити* тривалість проведення профілактики і, у подальшому, розглядати таким чином відновлену динамічну систему як «цілком працездатну».

Постановка задачі. Для динамічної системи, яка внаслідок випадкового характеру несправності (перебуваючи при цьому у поточному стані $E_{\text{ter}} \in E_j$; $j = \overline{1,v}$, тобто у стані, який відмінний від справного стану E_0, а динамічна система потребує профілактики), переводиться в режим профілактики, причому тривалість цієї профілактики обмежується часом T_{ter}. По завершенню часу T_{ter} динамічна система переводиться у стан $E_i \in E'$; $i = \overline{0,v}$ – тобто вважається справною та такою, що здатна функціонувати у робочому режимі. У іншому випадку, якщо стан відновленої динамічної системи E_k не задовольняє умові $E_k \in E_i; i = \overline{0,v}$ – призначається нова профілактика. Після кожної профілактики динамічна система перевіряється у відповідності до умови $E_k \in E' = \{E_i'\}\left(i = \overline{0,v'}, v' < v\right)$, де E_k – стан відновленої динамічної системи після профілактики.

Нехай процес відновлення динамічної системи описується стохастичним процесом $Y(t)$, який визначено на множині станів $E = \{E_i\}$, $\left(i = \overline{0,v}\right)$. Причому перехід процесу $Y(t)$ зі стану E_i у стан E_j $(i \neq j, i > j)$ за час t відбувається у відповідності до матриці

$$\mathbf{M}(t) = \{M(i,j,t)\} \quad \left(E_i \in E, E_j \in E \setminus \{E_1, ..., E_v\}\right).$$

Таким чином, якщо в момент початку профілактики динамічна система перебувала у стані E_i, то за час T_i вона може бути переведена у стан E_j із ймовірністю $M(i,j,T_i)$.

Підхід до визначення траєкторії надійності динамічної системи за **умови обмеженої тривалості профілактики**. У випадку, який розглядається, немає можливості скористатися методом марковських процесів з вкладеним ланцюгом внаслідок того, що стан E_v *не є регенеративною точкою*. Тоді, як і у попередньому випадку, розглянемо процес ξ_t, що спостерігається, і який описує переходи динамічної системи у моменти перевірок. Для процесу ξ_t елементи матриці переходів за один крок

$$\mathbf{Q}_{ij} = \begin{cases} P(i,j,T_i);\ E_i \in E';\ E_j \in E, \\ M(i,j,T_i);\ E_i \in E_{\text{ter}};\ E_j \in E. \end{cases} \tag{13}$$

Кожний рядок i матриці $\mathbf{Q}_{ij}$ в (13) відповідає або рядку матриці $P(t)$ при $t = T_i$, якщо $E_i \in E'$, або рядку i матриці $M(t)$, якщо $E_i \in E_{\text{ter}}$.

Для віднаходження вектору стаціонарного розподілу $\mathbf{S}$ матриці $\mathbf{Q}_{ij}$ складемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{Q}_{ij} \tag{14}$$

за умови

$$\sum_{E_i \in E} S_i = 1. \tag{15}$$

Час перебування процесу ξ_t у стані E_i являє собою фіксовану величину $\tau_i = T_i + P$ і за цей час динамічна система може бути використана за призначенням із середнім

$$\hat{\tau}_i(T_i) = \begin{cases} T_i - \int_0^{T_i} P(i,v,t)\,dt;\ E_i \in E', \\ 0,\ E_i \in E_{\text{ter}}. \end{cases} \tag{16}$$

Звідси легко встановити, що

$$K_{\text{rel}}(T) = \frac{\sum_{E_i \in E'} S_i(T)\hat{\tau}(T_i)}{\sum_{E_j \in E} S_j(T)\hat{\tau}(T_j)}. \tag{17}$$

Розглянемо тестовий приклад.

Приклад 2. Розглянемо динамічну систему, яка складається з трьох елементів: один основний та двох резервних. Резерв навантажений. Інтенсивності відмов та відновлювань кожного елементу дорівнюють відповідно $\lambda = 0,02$ час$^{-1}$., $\mu = 0,05$ час$^{-1}$.

Профілактичне обслуговування здійснюється двома ремонтними бригадами, які працюють незалежно одна від одної, коли число елементів, які відмовили більше, ніж один. В іншому випадку вони працюють спільно. Інтенсивність відновлення одного елементу двома ремонтними бригадами приймається однаковою та такою, що складає $1,5\mu$. Стратегії обслуговування обираються такими, як було прийнято для прикладу 1. Також приймається, що вектор-рядок $\mathbf{T} = \|75 \quad 55 \quad 11,7 \quad 16,8\|$ год.

Необхідно обчислити $K_{\text{rel}}(T)$ динамічної системи.

Визначимо для випадку, що розглядається, елементи $M_i(t)$ матриці $\mathbf{Q}_{ij}$ (елементи $P_i(t)$ можна взяти з прикладу 1):

$$M(1,0,t) = 1 - e^{-1,5\mu t};$$

$$M(1,1,t) = e^{-1,5\mu t};$$

$$M(2,0,t) = 1 + 3e^{-2\mu t} - 4e^{-1,5\mu t};$$

$$M(2,1,t) = 4\left(e^{-1,5\mu t} - e^{-2\mu t}\right);$$

$$M(2,2,t) = e^{-2\mu t};$$

$$M(1,2,t) = 1.$$

Інші елементи дорівнюють 0.

Далі, підставляємо значення вектор-рядка $\mathbf{T}$ в матрицю $\mathbf{Q}(t)$, отримаємо:

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{Vmatrix} 0,011 & 0,117 & 0,402 & 0,470 \\ 0 & 0,111 & 0,447 & 0,4653 \\ 0,608 & 0,296 & 0,096 & 0 \\ 0,577 & 0,271 & 0,117 & 0,035 \end{Vmatrix}.$$

Розв'язуючи систему рівнянь виду (14), маємо

$$\mathbf{S} = \|0,303 \quad 0,200 \quad 0,261 \quad 0,236\|.$$

Перевіряється виконання умови (15):

$$\sum_{i=1}^{4} S_i = 0,303 + 0,200 + 1,261 + 0,236 = 1,$$

тобто умова (15) – виконується.

З урахуванням (16) по формулі (17) обчислюється значення $K_{\text{rel}}(T)$:

$$K_{\text{rel}}(T) = \frac{0,303 \cdot 57,8 + 0,200 \cdot 44,5}{0,303 \cdot 76 + 0,200 \cdot 56 + 0,221 \cdot 12,17 + 0,236 \cdot 17,7} = 0,714 \cdot$$

Таким чином показано практичне застосування запропонованих підходів до визначення показників надійності динамічних систем, функціонування котрих характеризується режимом профілактики, в основу яких (підходів) покладено відповідні математичні моделі.

Висновки. Запропоновано підходи до визначення узагальненого показника надійності динамічних систем, функціонування яких характеризується режимом профілактики. Підходи ґрунтуються на застосуванні моделей, побудованих на вкладених ланцюгах Маркова. Відмінною особливістю запропонованих підходів є можливість прогнозу періодичності профілактик по реальному стану динамічних систем, а також за умови обмеження терміну профілактичних робіт. Виконано тестові дослідження запропонованих підходів, які показали їх дієвість та прикладну спроможність. Подальшим розвитком запропонованих підходів щодо забезпечення надійності динамічних систем доцільно розглядати випадки прогнозу, коли динамічні системи складаються з елементів, які мають суттєво відмінну складність (що зумовлює різну тривалість та періодичність профілактик для окремих елементів динамічної системи), а також, якщо метою профілактики є забезпечення необхідного рівня надійності динамічної системи у продовж часу, необхідного для виконання останньою поставленої задачі.

Список літератури:

1. Sunday A. Adedigba, Faisal Khan, and Ming Yang. Dynamic Failure Analysis of Process Systems Using Principal Component Analysis and Bayesian Network. In: Industrial & Engineering Chemistry Research. 2017. 56 (8). PP. 2094-2106. DOI: 10.1021/acs.iecr.6b03356.
2. Xiaohui Y., Wuzhi Z., Xinli S., Guoyang W., Tao L. and Zhida S. Review on power system cascading failure thoeries and studies: proceedings of the International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems (PMAPS), 2016. PP. 1-6. DOI: 10.1109/PMAPS.2016.7764167.
3. Zheng Z., Liu M., Zhang Z., Dong J. and Xie M. Distance-Based Distributionally Robust Optimization for a Preventive Maintenance Schedule in Hydrothermal Power Systems. In: IEEE Systems Journal. 2023. Vol. 17. No. 4. PP. 5487-5498. DOI: 10.1109/JSYST.2023.3324647.
4. Wang H., Jiang T., Xu S. and Xie Y. On the robust outer loop control of robotic systems: proceedings of the 36th Chinese Control Conference (CCC), 2017. PP. 1260-1264. DOI: 10.23919/ChiCC.2017.8027523.
5. Ma Q., Zhu Y., Liu M., Chang D., Pu Q. and Li C. Closed-loop Simulation Method of Stability Control System Based on Virtual Component Technology. In: IEEE 6th Conference on Energy Internet and Energy System Integration (EI2), 2022. PP. 1561-1564. DOI: 10.1109/EI256261.2022.10116748.
6 Song J., Cotilla-Sanchez E., Ghanavati G. and Hines P. D. H. Dynamic Modeling of Cascading Failure in Power Systems. In: IEEE Transactions on Power Systems, 2016. Vol. 31. No. 3. PP. 2085-2095. DOI: 10.1109/TPWRS.2015.2439237.
7. Ji J., Guo S. and Xi F. J. Dynamic Modeling and Optimization of a Fall Prevention Device Using Genetic Algorithm. In: 3rd International Conference on Advanced Robotics and Mechatronics (ICARM), 2018. PP. 66-71. DOI: 10.1109/ICARM.2018.8610783.

8. Креденцер, Б.П., Лєнков С. В., Міночкін А. І., Могилевич Д. І., Резніков М. І Технічне обслуговування систем з почасовою надмірністю. Київ, 2009. 172 с.

9. Мандзій Б. А., Волочій Б. Ю., Озірковський Л. Д., Змисний М. М., Кулик І. В. Оцінювання показників надійності відмовостійкої системи на основі мажоритарної структури з врахуванням параметрів стратегії аварійного відновлення. *Вісник НУ «Львівська політехніка». Радіотехніка та телекомунікації*. 2011. №705. С. 216–224.

10. Положаєнко, С. А., Прокофьєва Л. Л. Планування діагностичного експерименту при локалізації несправностей підсхем безінерційних систем. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*. 2018. Т. 8. № 1. С. 5–16. DOI: 10.15276/imms.v8.no1.5.

11. Verlan, A., Polozhaenko, S. Formalization of Representation of Sequence of Test Hypotheses in Diagnosing Electronic Schemes: proceedings of the IEEE 38th International Conference on Electronics and Nanotechnology, ELNANO, 2018. PP. 548–551. URL: https://ieeexplore.ieee.org/document/8477496.

12. Verlan A., Polozhaenko S. Diagnostics of Linear Systems in the State Space. *Problemele Energeticii Regionale*. 2019. Т. 41. №. 1-2. PP. 25-35. DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.3239162.

13. Shen J., Ma X., He P., Zhang J., Yang Q. and Wei K. A Methodology to Evaluate the Safety Prevention and Control System Effectiveness for a Ship Underway. In: 6th International Conference on Transportation Information and Safety (ICTIS), 2021. PP. 721-725. DOI: 10.1109/ICTIS54573.2021.9798554.

14. S. -n. Zhang et al. A Markov Chain Model with High-Order Hidden Process and Mixture Transition Distribution. In: International Conference on Cloud Computing and Big Data, 2013. PP. 509-514. DOI: 10.1109/CLOUDCOM-ASIA.2013.23.

Polozhaenko S.A., Prokofiev A.Ju. MODELS FOR DETERMINING THE RELIABILITY OF DYNAMIC SYSTEMS, THE FUNCTIONING OF WHICH IS CHARACTERIZED BY THE MODE OF PREVENTION

The work examines the issues of forecasting the reliability of dynamic systems for cases when their operation involves preventive maintenance. The forecast is based on the application of mathematical methods and relevant models.

During the actual operation of technical systems (the vast majority of which can be considered as dynamic systems), certain difficulties arise in maintaining a given level of their performance, which can be compensated by justified maintenance regimes, for example, prevention - with a simultaneous assessment of the reliability of a dynamic system that has undergone restorative (the essence - preventive) works. At the same time, carrying out certain types of preventive measures for a dynamic system, determining their duration and the time of inter-preventive operation, requires rational planning, which can be provided, in particular, by predictive modeling. At the same time, in the practice of forming prevention regimes of dynamic systems, a whole range of problems appears, the solution of which requires the presence of incomplete information about reliability. Such a situation occurs throughout the life of dynamic systems, which urgently requires the development of applied mathematical research methods. Their use allows you to monitor the qualitative change in reliability indicators and to plan the necessary preventive measures in advance.

Contradictions arise in the organization of preventive work for service personnel: on the one hand, it is necessary to increase the reliability of equipment (which can also be considered as dynamic systems from the point of view of systems theory) due to the implementation of preventive measures, which requires significant expenditure of time and material resources; on the other hand, it is economically unprofitable to remove equipment from the production cycle for preventive purposes for a long time. Therefore, there are optimal conditions for conducting preventive maintenance of equipment (dynamic systems), under which sufficiently high reliability of these systems is ensured, provided that the time of removal from the production cycle of the latter is minimized. Thus, a scientifically based complex of preventive maintenance allows you to maintain the level of reliability of the dynamic system, which is built into it at the stages of design and production.

Key words: *dynamic system, reliability, prevention, utilization ratio, model, Markov chain.*